KUJDES! MOS DËMTO BARKODIN

BARKODI

REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

PROVIMI ME ZGJEDHJE I MATURËS SHTETËRORE 2016

SESIONI I

VARIANTI A

E premte, 24 qershor 2016 **Ora 10.00**

Lënda: Matematikë e thelluar

Udhëzime për nxënësin

Testi në total ka **20 pyetje.**

Në test ka kërkesa me **zgjedhje** dhe me **zhvillim.**

Në kërkesat me zgjedhje rrethoni ***vetëm*** *shkronjën përbri përgjigjes së saktë, ndërsa për kërkesat me zhvillim është dhënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.*

Pikët për secilën kërkesë janë dhënë përbri saj.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Kërkesa	1	2	3	4	5	6	7	8
Pikët								
Kërkesa	9	10	11	12	13	14	15a	15b
Pikët								
Kërkesa	16	17	18a	18b	19	20		
Pikët								

Totali i pikëve

KOMISIONI I VLERËSIMIT

1............................Anëtar

2. ....Anëtar

Për pyetjet 1-10 rrethoni vetëm shkronjën që i përgjigjet alternativës së saktë.

1. Integrali i caktuar $\int_1^2 2x^{-2}dx$ është i barabartë me: **1 pikë**

A) 3
B) 2
C) 1
D) 0

2. Jepet $\frac{\cos x}{\sin x}=2$. Vlera e $\frac{tg\, x}{\text{cotg x}}$ është: **1 pikë**

A) 2
B) 1
C) 0,5
D) 0,25

3. Vlera e shprehjes $\log_3 6 + 3\log_3 2 - \log_3 16$ është: **1 pikë**

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3

4. Vija me ekuacion $y = e^{-2x}$ në pikën me abshisë x=0 ka tangjente me koeficient këndor: **1 pikë**

A) 4
B) 2
C) 0
D) –2

5. Jepet numri kompleks z= i(2 – i). Re(z) është: **1 pikë**

A) –2
B) –1
C) 1
D) 2

6. Bashkësia $A=\{x\in R / x<-1\, dhe\ x>-2\}$ është: **1 pikë**

A) $]-\infty,-1[$
B) $]-\infty,-2[$
C) $]-2,+\infty[$
D) $]-2,-1[$

7. Jepet barazimi $2^x \cdot 2^{-2} = 4$. Vlera e x është: **1 pikë**

A) 2
B) 3
C) 4
D) 6

8. Katetet e një trekëndëshi kënddrejtë janë 5cm dhe 10cm. Brinja e katrorit që ka të njëjtën sipërfaqe me këtë trekëndësh, është: **1 pikë**

A) 9 cm
B) 7 cm
C) 5 cm
D) 3 cm

9. Grafiku i funksionit $y=2 \cdot 3^{x+1}$ pret boshtin OY në pikën me ordinatë: **1 pikë**

A) 2
B) 3
C) 4
D) 6

10. Jepen f(x)= sinx dhe $g(x)=-\pi$. Vlera e fog(x) është: **1 pikë**

A) 1
B) 0
C) 0,5
D) –1

Pyetjet 11-20 janë me zhvillim dhe me arsyetim.

11. Vërtetoni që për funksionin f: $y=\frac{4x}{1+x^2}$ vlera më e madhe është 2 dhe më e vogla është –2.

3 pikë

Të tregojmë që për $\forall x \in R$: $-2 \leq \frac{4x}{1+x^2} \leq 2$

meqë $1+x^2 > 0$ $\forall x \in R$ kemi $\Leftrightarrow -2(1+x^2) \leq 4x \leq 2(1+x^2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(1+x^2) \leq 4x \\ 4x \leq 2(1+x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq (x+1)^2 \\ 0 \leq (x-1)^2 \end{cases}$

Sistemi eshtë i vërtetë për $\forall x \in R$, sepse të dy inekuacionet vërtetohen $\forall x \in R$.

12. Të zgjidhet ekuacioni: $9^x - 10\cdot 3^x + 9 = 0$ **3 pikë**

Ekuacioni shkruhet:

$$(3^2)^x - 10\cdot 3^x + 9 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm 8}{2} \begin{cases} t_1 = 9 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Shënoj $3^x = t$

$$(3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2 = t^2$$

Për $t_1 = 9$ për $t_2 = 1$

$3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow \boxed{x = 2}$

$3^x = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3^0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0}$

Përgjigje: $S\ \{0, 2\}$

13. Gjeni syprinën e figurës së kufizuar nga grafikët e funksioneve $y=|x|$; $y= -x^2+2$. **3 pikë**

Ndërtojmë grafikun $y = |x| = \begin{cases} x & \text{për } x \geq 0 \\ -x & \text{për } x < 0 \end{cases}$

$y = -x^2 + 2$, Grafiku paraqet një parabolë $\boxed{a=-1}$ me degë poshtë

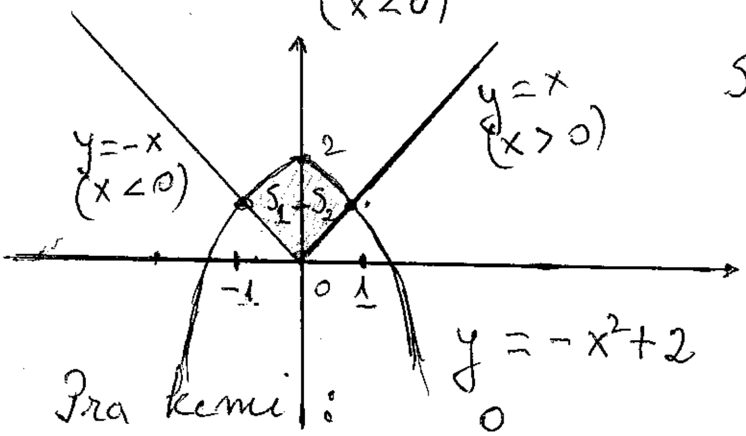
$C(0;2)$

x	-1	0	1
$y=-x^2+2$	1	2	1

Grafikët priten

$\begin{cases} y = -x^2+2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=-1}$ $(x<0)$

$\begin{cases} y = -x^2+2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=1}$ $(x>0)$



Shënoj $S_1 = \int_{-1}^{0} [-x^2+2-(-x)]dx = \int_{-1}^{0}(-x^2+2+x)dx$

$$S_2 = \int_0^1 (-x^2+2-x)dx$$

Pra kemi:

$$S = S_1 + S_2 = \int_{-1}^{0}[-x^2+2-(-x)]dx + \int_0^1(-x^2+2-x)dx =$$

$S_1 = \int_{-1}^{0}(-x^2+2+x)dx = \left(-\frac{x^3}{3}+2x+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\ nj^2, \ldots\ S_2 = \frac{1}{6} nj^2 \Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{3} nj^2}$

14. Të gjendet shuma e 20 kufizave të para të një progresioni aritmetik, duke ditur që $a_2 + a_{19} = 198$.

3 pikë

Dimë që $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ ku a_n progresion aritmetik

pra: $S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20})20}{2}$; $S_{20} = (a_1 + a_{20}) \cdot 10$

$a_{20} = a_1 + 19d$; $S_{20} = (2a_1 + 19d) \cdot 10$

kemi të dhënë $a_2 + a_{19} = 198 \Leftrightarrow a_1 + d + a_1 + 18d = 198$

$\Leftrightarrow \boxed{2a_1 + 19d = 198}$ që nga $S_{20} = 198 \cdot 10 = 1980$.

15. Jepet funksioni $y = \frac{\sqrt{x}}{\log_3(x-1)}$

a) Gjeni $f(4) = \frac{\sqrt{4}}{\log_3(4-1)} \Leftrightarrow f(4) = \frac{2}{\log_3 3}$

1 pikë

$f(4) = \frac{2}{1} = 2$.

b) Gjeni bashkësinë e përcaktimit.

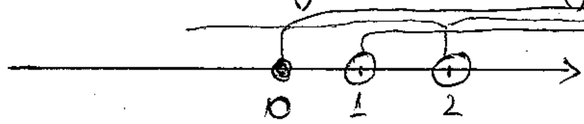
2 pikë

Bashkësia e përcaktimit gjendet nga zgjidhja e sistemit $\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 1 > 0 \\ \log(x-1) \neq 0 \end{cases}$

$\boxed{x \geq 0}$

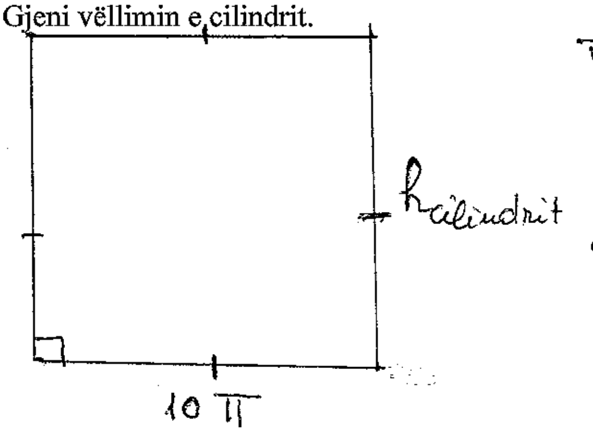
$x - 1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > 1}$

$\log(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow \log(x-1) \neq \log 1 \Leftrightarrow x - 1 \neq 1 \Leftrightarrow \boxed{x \neq 2}$



$p: x \in]1;2[\cup]2;+\infty[$

16. "Hapja" e sipërfaqes së një cilindri rrethor të drejtë është katrori me brinjë 10π cm.
Gjeni vëllimin e cilindrit. **3 pikë**

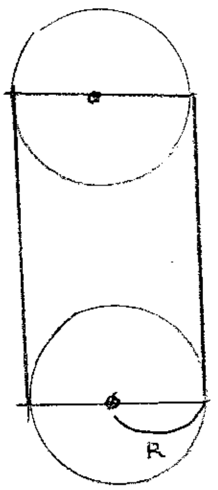


$$V_{cilindrit} = \pi R^2 h$$

$$\begin{cases} h_{cilindrit} = 10\pi \text{ cm} \\ \text{Perimetri i bazes} = 10\pi \text{ cm} \end{cases}$$

$$P = \boxed{2\pi R = 10\pi} \Leftrightarrow$$

$$R = 5 \text{ cm}$$



$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 10\pi$$

$$V = 250\pi^2 \text{ cm}^3$$

17. Hidhet një zar dy herë. Pikët shënohen në një letër. Shënojmë me x rezultatin e parë dhe me y rezultatin e dytë. Gjeni probabilitetin e ngjarjes: $|x\text{-}y| = 2$ **2 pikë**

Hapsira e rezultateve:

h_I	h_{II}
6	6

$$m(E) = 36$$

Ngjarja $A = \{(1,3);(3,1);(2;4);(4,2);(3;5)(5;3)(4;6)(6;4)\}$

$$n(A) = 8$$

dhe $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)}$ $\qquad p(A) = \dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$

18. Jepen vektorët $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AA_1}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\5\end{pmatrix}$

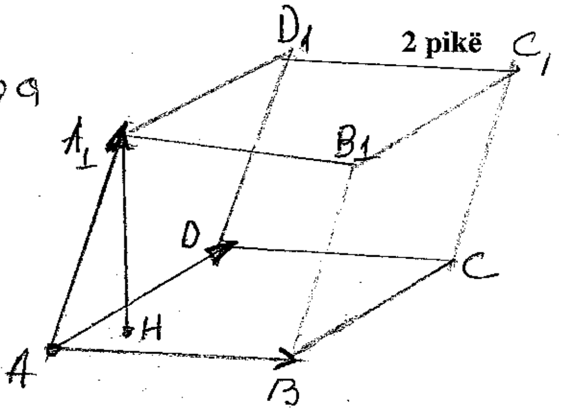
a) Gjeni vëllimin e paralelopipedit të ndërtuar mbi këta vektorë. **2 pikë**

Dimë që $V=|(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AA_1}|$

por $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AA_1} = \begin{vmatrix}4&2&-3\\3&1&-2\\0&2&5\end{vmatrix} = -12$

$V=12nj^3$

b) Gjeni lartësinë e hequr nga kulmi A_1. **2 pikë**



Ndërtoj lartësinë e paralelopipedit nga kulmi A_1 $\boxed{A_1H = l}$

Dimë që $V = B\cdot l$

ku $B\to$ Syprina e ABCD dhe $l = A_1H$

$l=\frac{V}{B}$

Nga kuptimi gjeometrik i $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$ dimë që

$B=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|$

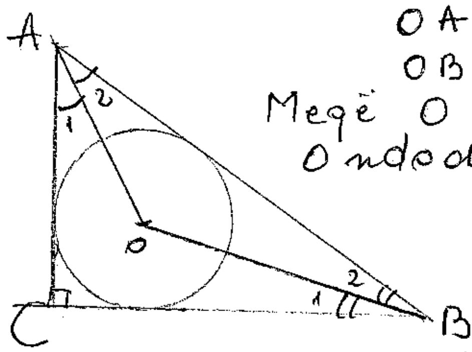
$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix}\vec{i}&4&2\\\vec{j}&3&1\\\vec{k}&0&2\end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix}3&1\\0&2\end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix}4&2\\0&2\end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix}4&2\\3&1\end{vmatrix}$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = 6\vec{i}-8\vec{j}-2\vec{k}$; $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}6\\-8\\-2\end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}| = \sqrt{36+64+4} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$ nj; nga ku $B = 2\sqrt{26}\,nj^2$

dhe $l = \frac{12}{2\sqrt{26}} = \frac{6}{\sqrt{26}} = \frac{6\sqrt{26}}{26} = \frac{3\sqrt{26}}{13}$ nj.

19. Qendra e rrethit të brendashkruar një trekëndëshi kënddrejtë ka largesa $\sqrt{5}$ cm dhe $\sqrt{10}$ cm nga skajet e hipotenuzës. Gjeni gjatësinë e hipotenuzës. **3 pikë**



$OA = \sqrt{5}$ cm

$OB = \sqrt{10}$ cm

Megë O është qendër e rrethit të brendashkruar, O ndodhet në pikëprerjen e përgjysmoreve

Megë $\hat{C} = 90^\circ$, $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$

$\hat{A}_2 + \hat{B}_2 = 45^\circ$ pra $A\hat{O}B = 135^\circ$

Në $\triangle AOB$ zbatoj teoremën e kosinusit

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\, OA \cdot OB \cos A\hat{O}B$

$AB^2 = 5 + 10 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$AB^2 = 25 \implies AB = 5$ cm.

20. Jepet funksioni i përcaktuar në R i tillë që $f(x) = \begin{cases} kx+1 & \text{për } x \le \pi \\ \cos x & \text{për } x > \pi \end{cases}$.

Për ç'vlerë të koeficientit k funksioni është i vazhdueshëm në $x=\pi$? **3 pikë**

Nga përkufizimi i vazhdueshmërisë në pikë kemi që: $(y = f(x)$ i vazhduar në $x = \pi) \iff (\lim_{x\to\pi} f(x) = f(\pi))$

1) $f(\pi) = k \cdot \pi + 1$

2) $\lim_{x\to\pi} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to\pi^-} kx+1 = k\pi+1 \\ \lim_{x\to\pi^+} \cos x = \cos\pi = -1 \end{cases}$

(Që funksioni të ketë limit në $x=\pi$) $\iff \lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} f(x)$

pra $k\pi + 1 = -1 \iff k\pi = -2 \iff \boxed{k = -\frac{2}{\pi}}$

pra, për $k = \frac{-2}{\pi}$ $\boxed{\lim_{x\to\pi} f(x) = -1}$

3) $f(\pi) = k\pi + 1 = -\frac{2}{\pi} \cdot \pi + 1 = -1$

Pra për funksionin kemi $\lim_{x\to\pi} f(x) = f(\pi) \iff f$ i vazhduar në $x=\pi$.