

BARKODI



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
 MINISTRIA E ARSIMIT
 DHE SPORTIT
 AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

PROVIMI ME ZGJEDHJE I MATURËS SHTETËRORE 2014

SESIONI I

VARIANTI **A**

E mërkurë, 18 qershor 2014

Ora 10.00

Lënda: Matematikë e thelluar

Udhëzime për nxënësin

Testi në total ka **20 pyetje**.

Në test ka kërkesa me **zgjedhje** dhe me **zhvillim**.

*Në kërkesat me zgjedhje rrethoni **vetëm** shkronjën përbri përgjigjes së saktë, ndërsa për kërkesat me zhvillim është dhënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.*

Pikët për secilën kërkesë janë dhënë përbri saj.

Për përdorim nga komisioni i vlerësimit

Kërkesa	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pikët									
Kërkesa	10	11	12	13a	13b	14	15a	15b	15c
Pikët									
Kërkesa	16	17a	17b	18	19	20a	20b		
Pikët									

Totali i pikëve

KOMISIONI I VLERËSIMIT

1.....Anëtar

2.Anëtar

1. Vlera e $\log_2 8$ është:

1 pikë

- A) 3
- B) 2
- C) -2
- D) -3

2. Jepen bashkësitë: $A = \{ (x;y) / x^2 + y^2 = 1 \}$ dhe $B = \{ (x;y) / y = x \}$.

Numri i elementëve të $A \cap B$ është:

1 pikë

- A) 4
- B) 3
- C) 2
- D) 1

3. Në një trekëndësh kënddrejtë sipërfaqja është 24cm^2 dhe njëri katet 6cm. Kateti tjetër i tij është:

1 pikë

- A) 4cm
- B) 8cm
- C) 10cm
- D) 14cm

4. Shprehja $(\cos x + \sin x)^2 - 1$ është identike me:

1 pikë

- A) $-\sin 2x$
- B) $-\cos 2x$
- C) 1
- D) $\sin 2x$

5. Nëse $3^{2x} = 9$, atëherë vlera e 2^{2x-1} është:

1 pikë

- A) 4
- B) 3
- C) 2
- D) 1

6. Jepet progresioni gjeometrik 32; 16; Kufiza e katërt e tij është:

1 pikë

- A) 8
- B) 4
- C) 2
- D) 1

7. Gjatësia e vektorit $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ -4 \end{pmatrix}$ është 5. Sa është $|x|$?

1 pikë

- A) -4
- B) 4
- C) 3
- D) 5

8. Jepet funksioni $f(x) = \sin 3x$. Derivati i tij për $x = \frac{\pi}{3}$ është:

1 pikë

- (A) -3
 (B) -1
 (C) 0
 (D) 3

9. Numri kompleks $1-i^4$ është i barabartë me:

1 pikë

- (A) -2
 (B) 2
 (C) 0
 (D) 1

10. Vlera e shprehjes $|3x-5|$ për $x = -1$ është:

1 pikë

- (A) 8
 (B) 2
 (C) -2
 (D) -8

11. Gjeni bashkësinë e përcaktimit të funksionit: $y = \frac{1}{x-1} + \log(2x-x^2)$

3 pikë

Vendosim kushtet $\begin{cases} x-1 \neq 0 & x-1 \neq 0 & x \neq 1 \\ 2x-x^2 > 0 \end{cases}$

$A =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ $2x-x^2 = 0 \quad x(2-x) = 0$
 $x=0$ ose $x=2$

	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$2x-x^2$	-	0	+	0	-

$B =]0; 2[$

$A \cap B =]0; 1[\cup]1; 2[$

Bashkësia e përcaktimit të funksionit është $]0; 1[\cup]1; 2[$

12. Për ç'vlera të a dhe m ekuacioni $x^2 + (m-1)x + a - m = 0$ ka dy rrënjë të kundërta?

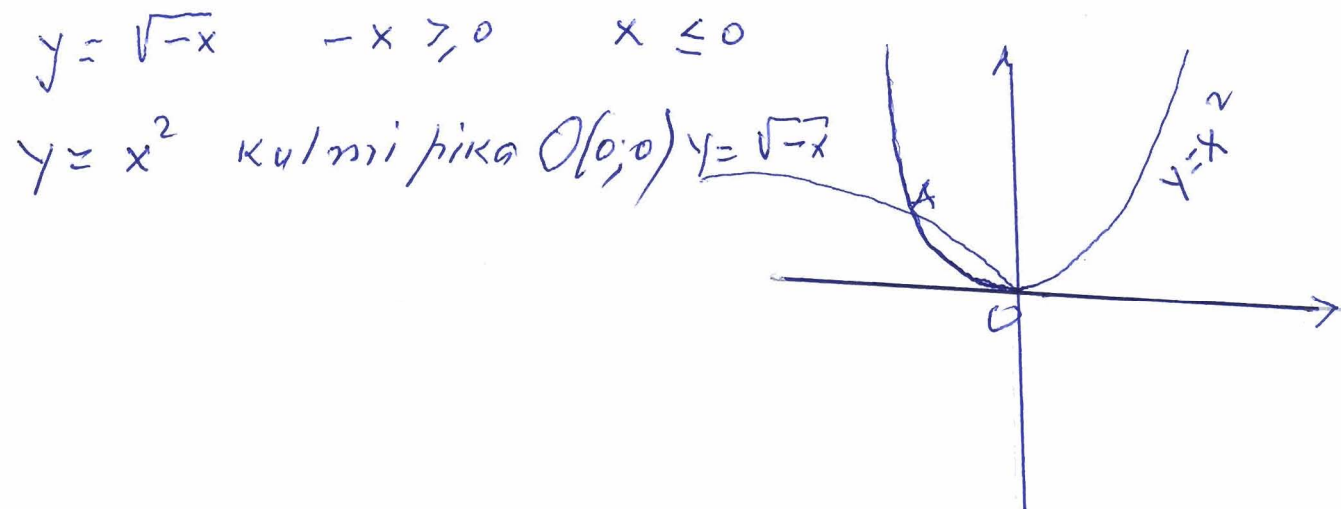
3 pikë

Që ekuacioni të ketë dy rrënjë të kundërta duhet që $x_1 + x_2 = 0$; pra $b = 0$ ose $m-1 = 0$ ($m=1$). Ekuacioni mer trajtën $x^2 + a - 1 = 0$ ose $x^2 = 1 - a$. Që ekuacioni të ketë 2 rrënjë duhet $1 - a > 0$ ose $a < 1$. Ekuacioni ka dy rrënjë të kundërta për $m=1$ dhe $a < 1$.

13. Jepen funksionet $y = \sqrt{-x}$ dhe $y = x^2$

a) Skiconi grafikët e funksioneve

2 pikë



b) Gjeni syprinën e figurës së kufizuar nga grafikët e dy funksioneve.

2 pikë

Gjejmë pikat e ndërprerjes së grafikëve.

$$\sqrt{-x} = x^2 \quad -x = x^4 \quad x^4 + x = 0 \quad x(x^3 + 1) = 0 \quad x = 0 \quad x = -1$$

$$O(0;0) \quad A(-1;1)$$

$$S = \int_{-1}^0 (\sqrt{-x} - x^2) dx = \int_{-1}^0 \sqrt{-x} dx - \int_{-1}^0 x^2 dx = \int_{-1}^0 (-x)^{1/2} d(-x) - \int_{-1}^0 x^2 dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3} (-x)^{3/2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = \left(0 + \frac{2}{3} \right) - \left(0 + \frac{1}{3} \right) =$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ njehsi katohore}$$

14. Për ç'vlerë të a drejtëza $y = ax + 3$ është tangjente me hiperbolën $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

2 pikë

Që drejtëza $y = ax + 3$ të jetë tangjente me hiperbolën duhet të plotësohet kushti

$$a^2 k^2 - b^2 = c^2, \quad k = a \quad c = 3, \quad a^2 = 25 \quad b^2 = 16$$

Kemi

$$25 \cdot a^2 - 16 = 9 \quad 25 a^2 = 25$$

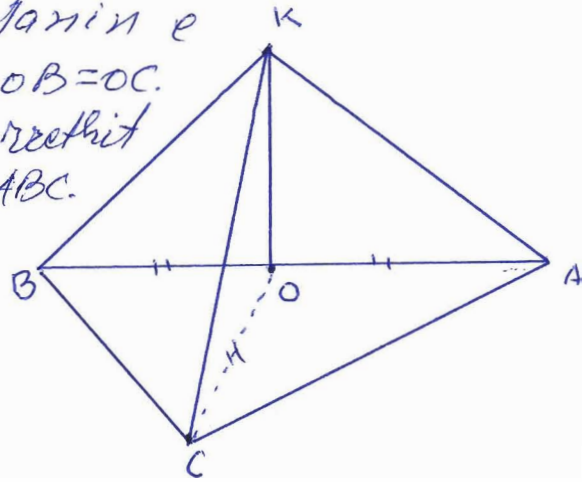
$$a^2 = 1 \quad a = \pm 1.$$

15. Kulmi K i piramidës trekëndore me bazë trekëndëshin ABC është i baraslarguar nga kulmet A, B, C, kurse këmba e lartësisë KO bie në mesin e AB. Jepen $AC=8\text{cm}$; $BC=6\text{cm}$ dhe $KO=12\text{cm}$.

a) Vërtetoni se trekëndëshi ABC është kënddrejtë në C.

1 pikë

Më gjenë se $KA=KB=KC$ rrjedh që projektionet e tyre në planin e bazës janë të barabarta $OA=OB=OC$. Pra pika O është qendra e rrethit të jashtëshkruar të trekëndëshit ABC me diametër AB. Pra $\hat{C}=90^\circ$ d.m.th ΔABC është kënddrejtë.



b) Gjeni brinjën anësore të piramidës.

2 pikë

Në ΔABC ku $\hat{C}=90^\circ$ kemi $AB^2 = BC^2 + AC^2$

$$AB^2 = 36 + 64 = 100 \quad AB = 10 \text{ cm.}$$

Në Δ kënddrejtë KOA ($KO \perp AB$) zbatojmë teoremën e Pitagorës. Kemi $KA^2 = KO^2 + OA^2$ ($OA = \frac{1}{2}AB = 5 \text{ cm}$)

$$KA^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

$$KA = 13 \text{ cm}$$

c) Gjeni vëllimin e piramidës.

1 pikë

$$\text{Aimë që } V = \frac{1}{3} S_b \cdot h.$$

$$S_b = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} 24 \cdot 12 = 96 \text{ cm}^3.$$

16. Gjeni vlerat a e b në mënyrë që funksioni $y=ax^3+bx^2$, pikën $M(1;2)$ ta ketë pikë infleksioni. **3 pikë**

Që funksioni të ketë pikë infleksioni duhet që derivati i dytë të bëhet 0.
 $y' = 3ax^2 + 2bx$ $y'' = 6ax + 2b$. Më gjenë se
 $M(1;2)$ është pikë infleksioni $y''(1) = 0$
 Pra $6a + 2b = 0$. $M(1;2)$ është pikë e grafikut
 Pra $2 = a + b$ kemi $\begin{cases} 6a + 2b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases}$ $a = 2 - b$
 $6(2 - b) + 2b = 0$ $12 - 6b + 2b = 0$ $4b = 12$ $b = 3$
 $a = 2 - 3 = -1$. Pra $a = -1$ dhe $b = 3$.

17. Jepet funksioni $y=x^3-3x+3$.

a) Studioni monotoninë e funksionit

2 pikë

Gëri të 6 studjime të shprehjen e derivatit të parë të funksionit
 $y' = 3x^2 - 3$ $3x^2 - 3 = 0$ $x^2 = 1$ $x = \pm 1$
 monotoninë e funksionit
 Në $]-\infty, -1[$ funksioni rritet
 Në $]-1; 1[$ funksioni zbritet
 Në $]1; +\infty[$ funksioni rritet

b) Gjeni ekuacionin e tagjentes ndaj grafikut të funksionit të hequr në pikën $x=0$ të tij.

2 pikë

Ekuacioni i tagjentes në $x=a$ te grafikut të funksionit është $y - f(a) = f'(a)(x - a)$

$$a=0 \quad y - f(0) = f'(0) \cdot x$$

$$f(0) = 3 \quad f'(0) = -3$$

$$\text{kemi } y - 3 = -3x \quad \text{ose } y = -3x + 3.$$

Ekuacioni i tagjentes në $x=0$ është

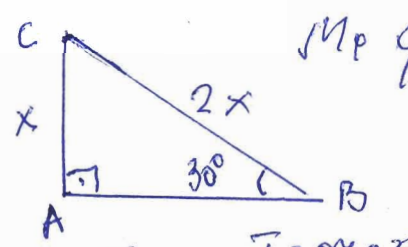
$$y = -3x + 3$$

18. Syprina e një trekëndëshi kënddrejtë me një kënd 30° është $8\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Gjeni katetet e trekëndëshit.

2 pikë

Me qënë se këndi B është 30° kemi $BC = 2AC$
 $AC = x$ $BC = 2x$



Me qënë se syprina e ΔABC është $8\sqrt{3}$ kemi $\frac{x \cdot x\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$
 ose $x^2 = 16$ $x = 4$ $2x = 8$; $AB = 4\sqrt{3}$

Katetet e trekëndëshit janë:
 4 cm dhe $4\sqrt{3}$ cm.

19. Dhjetë etiketa kanë të shënuara shifrat 0;1;2;.....9. Zgjidhen rastësisht 2 etiketa pa i parë shifrat.

Sa është probabiliteti që dy etiketat e nxjerra të jenë me shifrat tek?

2 pikë

Numuri i shifrave është 10.
 Në këtë bashkësi me 10 elemente zgjidhen dy etiketa njëherë.
 Pra numuri i elementeve të hapësirës së rezultateve është $n(H) = C_{10,2} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$
 Numuri i elementeve (shifra) tek është 5.
 Pra numuri i elementeve të ngjarjes A: dy etiketat e nxjerra të jenë me shifra tek, është $n(A) = C_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$
 Probabiliteti i ngjarjes A është
 $P(A) = \frac{n(A)}{n(H)} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$

20. Paga mujore e një punonjësi është 40.000 lekë. Çdo vit paga rritet 5%.

a) Sa bëhet paga e tij pas 1 viti?

1 pikë

Shënojmë me S_1 paga e punonjësit pas 1 viti

$$S_1 = 40.000 + \frac{5}{100} \cdot 40.000 = 40.000 + 2000 = 42.000 \text{ lekë}$$

b) Sa % u rrit paga e tij pas 2 vjetësh?

2 pikë

Shënojmë me S_2 pagën e punonjësit pas 2 vjetësh.

$$S_2 = S_1 + \frac{5}{100} S_1 = 42000 + \frac{5}{100} \cdot 42000 = 42000 + 2100$$

$$= 44100 \text{ lekë}$$

Paga pas dy vjetësh u rrit me %

$$\frac{S_2 - 40.000}{40.000} = \frac{44100 - 40.000}{40.000} =$$

$$\frac{4100}{40.000} = \frac{41}{400} = \frac{41}{4} \% = 10,25 \%$$