KUJDES! MOS DËMTO BARKODIN

BARKODI

REPUBLIKA E SHQIPËRISË
MINISTRIA E ARSIMIT
DHE SPORTIT
AGJENCIA KOMBËTARE E PROVIMEVE

# PROVIM ME ZGJEDHJE I MATURËS SHTETËRORE 2015

## SESIONI I

**VARIANTI A**

**E premte, 19 qershor 2015** **Ora 10.00**

**Lënda: Matematikë e thelluar**

**Udhëzime për nxënësin**

Testi në total ka **20 pyetje.**

Në test ka kërkesa me **zgjedhje** dhe me **zhvillim.**

*Në kërkesat me zgjedhje rrethoni **vetëm** shkronjën përbri përgjigjes së saktë, ndërsa për kërkesat me zhvillim është dhënë hapësira e nevojshme për të shkruar përgjigjen.*

Pikët për secilën kërkesë janë dhënë përbri saj.

**Për përdorim nga komisioni i vlerësimit**

| Kërkesa | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pikët | | | | | | | | |
| Kërkesa | 9 | 10 | 11 | 12 | 13a | 13b | 14 | 15 |
| Pikët | | | | | | | | |
| Kërkesa | 16 | 17a | 17b | 18a | 18b | 19 | 20 | |
| Pikët | | | | | | | | |

**Totali i pikëve**

**KOMISIONI I VLERËSIMIT**

1.............................Anëtar

2. ............................Anëtar

***Për pyetjet 1-13 rrethoni vetëm shkronjën që i përgjigjet alternativës së saktë.***

**1.** Zgjidhje e ekuacionit 2x+1 = $\frac{3}{x}$ është numri: **1 pikë**

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3

**2.** Në progresionin gjeometrik q=$\frac{1}{2}$. Vlera e $\frac{y_8}{y_5}$ është: **1 pikë**

A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{1}{8}$
D) $\frac{1}{16}$

**3.** Vlera e $\log_3 3^5 - \log_5 5^3$ është: **1 pikë**

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4

**4.** Vlera e shprehjes $\sin^2 40^o + \sin^2 50^o$ është: **1 pikë**

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3

**5.** Trekëndëshi kënddrejtë me katete 4 cm dhe x cm ($x \neq 0$), ka syprinë të njëjtë me katrorin me brinjë x cm. Vlera e x është: **1 pikë**

A) 0
B) 1
C) 2
D) 4

**6.** Numri kompleks z = $\frac{2i}{i-1}$ e ka pjesën reale Re(z)= **1 pikë**

A) 1
B) 2
C) 7
D) 9

**7.** Vektori $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ y-1 \end{pmatrix}$ është parlel e boshtin OX. Vlera e y është: **1 pikë**

A) 3
B) 2
C) 1
D) 0

**8.** Koeficienti këndor i tangentes me grafikun e funksionit y = sinx në pikën $x = \frac{\pi}{6}$ është: **1 pikë**

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
B) 0,5
C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) − 0,5

**9.** Drejtëzat ($d_1$): $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{k} = \frac{z-1}{2k}$ dhe ($d_2$): $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+1}{3k}$ janë paralele. Vlera e *k* është: **1 pikë**

A) −3
B) −2
C) 2
D) 4

**10.** Vlera e shprehjes $(3^{-1})^2 \cdot 9$ është: **1 pikë**

A) $\frac{1}{3}$
B) 1
C) 3
D) $3^4$

**11.** Të zgjidhet ekuacioni $8^{x-2} - 4^{x-1} = 0$ **3 pikë**

vlerat e lejuara të x, janë $x \in R$

1. Ekuacioni shkruhet $8^{x-2} = 4^{x-1}$ shprehim fuqitë me bazë 2, kemi $(2^3)^{x-2} = (2^2)^{x-1} \Leftrightarrow$ 2. $2^{3(x-2)} = 2^{2(x-1)}$

3. $\Leftrightarrow 3(x-2) = 2(x-1) \Leftrightarrow 3x-6 = 2x-2 \Leftrightarrow 3x-2x = 6-2$

$\Leftrightarrow \boxed{x=4}$ P: Ekuacioni ka rrënjë $\boxed{x=4}$

**12.** Gjeni bashkësinë e përcaktimit të funksionit $y=\sqrt{2-\log_3 x}$ **2 pikë**

①. Bashkësia e përcaktimit $E=\{x\in R / x>0$ dhe $2-\log_3 x\ge 0\}$

Këtej marrim sistemin $\begin{cases} x>0 & I \\ 2-\log_3 x\ge 0 & II \end{cases}$

I inekuacioni parë ka bashkesi zgjidhjesh $A=]0,+\infty[$

②. II inekuacioni dytë $2-\log_3 x\ge 0 \Leftrightarrow 2\ge \log_3 x$, meqenëse baza e logaritmit është $3>1$, atehere kemi; $0<x\le 9$,
d.m.th bashkesia e zgjidhjeve $B=]0,9]$

P: Bashkësia e përcaktimit $E=A\cap B=]0,9]$

**13.** Jepet funksioni $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$

a) Studioni monotoninë e funksionit të mësipërm. **3 pikë**

Bashkësia e përcaktimit $E=R$, sepse $f(x)$ është polinom

Monotonia

①. $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)' \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2-4 \Leftrightarrow f'(x)=x^2-4$

②. studioj shenjën e $f'(x)$.

- Rrenjet $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ose $x+2=0 \Leftrightarrow x_1=2$ ose $x_2=-2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)=x^2-4$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

③. P:
- për $x\in]-\infty,-2[$ $f(x)$ rritës
- për $x\in[-2,2]$ $f(x)$ zbritës
- për $x\in]2,+\infty[$ $f(x)$ rritës

b) Gjeni pikën e infleksionit për grafikun e funksionit të mësipërm. **1 pikë**

Për pikën e infleksionit

①. $f''(x)=(x^2-4)'=2x \Leftrightarrow f''(x)=2x$

M.q.s $f(x)$ është polinom dhe $f''(x)=0$, $2x=0$

për $x=0$
ku $\Rightarrow y=0$
atehere pika $O(0,0)$ pikë infleksioni

Ose me studim të $f''(x)$.

**14.** Jepet funksioni $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{për } x \prec 3 \\ 3m & \text{për } x \geq 3 \end{cases}$. Për cilat vlera të *m* funksioni është i vazhdueshëm në pikën $x = 3$.

**2 pikë**

Funksioni $f(x)$ është i vazhdueshëm në $x=3$ në se plotëson kushtet

(1). 1° është i përcaktuar në $x=3$, vërtetë $f(3)=3m$

2° ka limit në $x=3$, vërtetë $\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x)$. Në këtë rast kemi

(2). $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}} = 3+3=6$ dhe

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} 3m = 3m \implies 3m = 6$

3° $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) \iff 3m = 6 \implies \boxed{m=2}$

P: Për vleren $m=2$, funksioni është i vazhdueshem në $x=3$

**15.** Për vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ jepen: $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 7$ *dhe* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 21$. *Gjeni* $|\vec{a} x \vec{b}|$

**3 pikë**

(1). Dimë se $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin\alpha|$ (1), ku $\alpha = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

Nga $\vec{a} \cdot \vec{b} = 21$ dhe $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 7$ gjej $\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{21}{5 \cdot 7} \implies \boxed{\cos\alpha = \frac{3}{5}}$

(2). Nga teorema themelore e trigonometrisë

kemi $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \implies \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \implies$

$\sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \implies \sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \implies \sin^2\alpha = \frac{16}{25}$

$\implies \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \implies \sin\alpha = \pm \frac{4}{5}$

(3). Duke zevendësuar tek (1) marrim:

$|\vec{a} \times \vec{b}| = 5 \cdot 7 \cdot \left|\pm \frac{4}{5}\right| \implies |\vec{a} \times \vec{b}| = 5 \cdot 7 \cdot \frac{4}{5} \implies |\vec{a} \times \vec{b}| = 28$

P: $|\vec{a} \times \vec{b}| = 28$

**16.** Hidhet një zarë kubik dy herë. Gjeni probabilitetin e ngjarjes që, herën e dytë të bjerë numër 2 njësi më i madh se herën e parë. **2 pikë**

Dimë se $p(A) = \frac{n(A)}{n(H)}$

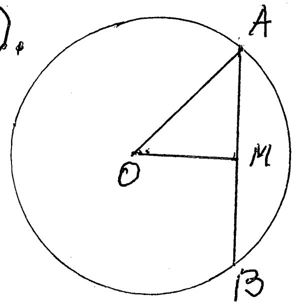
① . $n(H)$. Meqenëse hidhet zari 2 herë nga skema $\boxed{6 \mid 6}$ (Hedhja I, II) $\Rightarrow n(H) = 6^2 = 36 \Rightarrow n(H) = 36$

② . Ngjarja $A = \{(1;3); (2;4); (3;5); (4;6)\} \Rightarrow n(A) = 4$

$p(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ P: $p(A) = \frac{1}{9}$.

**17.** Në rrethin me rreze 10cm ndërtohet korda [AB], që ka largësinë 8cm nga qëndra e tij.

a) Gjeni gjatësinë e kordës. **2 pikë**

①. 


Dimë se kur $[OM] \perp [AB]$, atëherë M mesi [AB] d.m.th $AB = 2AM$

②. Në $\triangle OAM$ kemi $OA = 10$ cm, $OM = 8$ cm dhe $\hat{M} = 90°$

nga teorema e Pitagorës $OA^2 = OM^2 + AM^2$

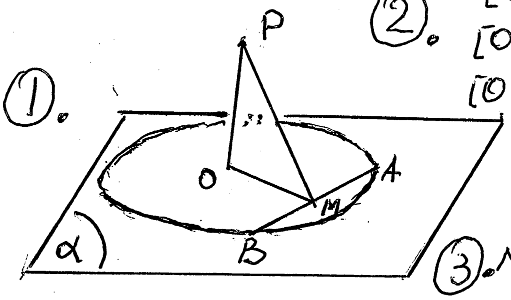
$\Rightarrow AM^2 = OA^2 - OM^2 \Rightarrow AM^2 = 10^2 - 8^2 \Rightarrow AM^2 = 36$

$\Rightarrow AM = \sqrt{36} \Rightarrow AM = 6$ cm $\Rightarrow AB = 2 \cdot 6$

$\Rightarrow \boxed{AB = 12 \text{ cm}}$ P: korda [AB] ka gjatësi $AB = 12$ cm

b) Nga pika O (qendra e rrethit) ndërtohet pingulja [OP] me planin e rrethit, me gjatësi 6 cm. Gjeni largësinë e pikës P nga korda [AB]. **3 pikë**

. Shenoj me ($\alpha$) planin e rrethit

①. 


②. $[OP] \perp \alpha$, $[OM] \perp [AB]$, $[OM] \subset \alpha$ $\overset{T.3\perp}{\Longrightarrow}$ $[PM] \perp [AB]$, d.m.th PM largesia e pikës P nga korda [AB].

③. Në $\triangle$ kendrejtë në O, POM kemi $OP = 6$ cm, $OM = 8$ cm. Nga teorema e Pitagorës

$PM^2 = OP^2 + OM^2 \Rightarrow PM^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow PM^2 = 36 + 64 = 100$

$\Rightarrow PM = \sqrt{100} \Rightarrow \boxed{PM = 10 \text{ cm}}$

P: Largesia e pikes P nga [AB] është $\boxed{PM = 10 \text{ cm}}$

**18.** Një klasë ka 25 nxënës. 60% e nxënësve janë vajza. Në provimin e matematikës, që bënë nxënësit, vajzat arritën notën mesatare 8,2 dhe djemtë notën mesatare 7.

a) Gjeni numrin e vajzave dhe numrin e djemve që ka klasa. **1 pikë**

Shenoj $n_k$ – numri i nxenesve të klasës
$n_v$ – numri i vajzave dhe $n_d$ – numri i djemve

$n_k = 25 = n_v + n_d$ (1) Meqenëse 60% e 25 janë vajza

kemi $n_v = 0{,}6 \cdot 25 \Rightarrow \boxed{n_v = 15}$ nga (1)

$25 = n_v + n_d \Rightarrow n_d = 25 - n_v \Rightarrow n_d = 25 - 15 = 10.$

P: Klasa ka 15 vajza dhe 10 djem.

b) Sa është nota mesatare e klasës në këtë provim? **2 pikë**

shenoj: $m_k$ nota mesatare e klases, $m_v$ nota mesatare e vajzave dhe $m_d$ nota mesatare e djemve.

1 • $m_k = 0{,}6\, m_v + 0{,}4\, m_d \Rightarrow m_k = 0{,}6 \cdot 8{,}2 + 0{,}4 \cdot 7 \Rightarrow$

2 • $m_k = 4{,}92 + 2{,}8 = 7{,}72$

P: Nota mesatare e klases "është" $\boxed{m_k = 7{,}72}$

**19.** Gjeni ekuacionin e tagjentes ndaj elipsit $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$, e cila është pingul me drejtëzën x–y+4 = 0 **3 pikë**

1 • Shenoj $k$, koficientin kendor të tangentes dhe $k_1$, koficientin kendor të drejtezes me ekuacion $x - y + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = -\frac{a}{b} \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{-1} = 1$

dhe $k \cdot k_1 = -1 \Rightarrow \boxed{k = -1}$

2 • Nga kushti i tangences së drejtezes me elipsin shkruaj $a^2 \cdot k^2 + b^2 = t^2$ duke zevendësuar $a^2 = 12$, $b^2 = 4$ dhe $k = -1$, kemi $12(-1)^2 + 4 = t^2 \Rightarrow$

$12 + 4 = t^2 \Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow \boxed{t = \pm 4}$

3 • ekuacioni i tangentes është $y = kx + t$

$\Rightarrow y = -x \pm 4$

P: Tangentet me elipsin kanë ekuacioni $y = -x \pm 4$

**20.** Të gjëndet syprina e figurës që kufizohet nga vijat $y = x^3$ dhe $y = x$. **3 pikë**

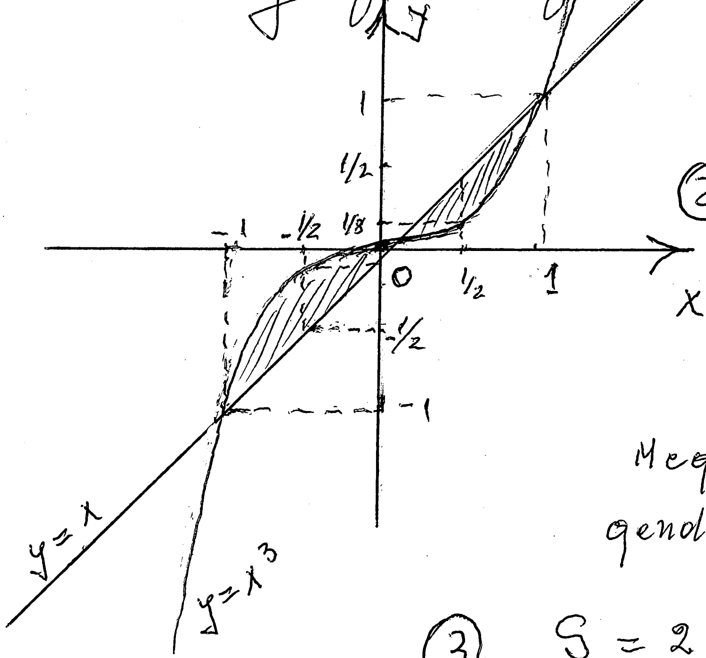
① . Ndërtojmë figurën:

Për grafikun e funksionit $y = x^3$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1 \dots +\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=x^3$ | $-\infty$ | $-1$ | $-\frac{1}{8}$ | $0$ | $\frac{1}{8}$ | $1 - +\infty$ |

Për grafikun e funksionit $y = x$

| $x$ | $-\infty \dots -1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1 \dots +\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y=x$ | $-\infty \dots -1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1 \dots +\infty$ |




② . Nga grafikët e funksioneve

Seme se se, priten në $x=-1$, $x=0$ dhe $x=1$

Meqenëse pika $O(0,0)$ është qendër simetrie e grafikëve atëherë

③ . $S = 2\int_0^1 (x - x^3)\,dx = 2\left(\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^3\,dx\right) =$

$= 2\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right) =$

$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{2-1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

P: $S = \frac{1}{2}$ njësi sipërfaqe